Revista de Educação da Faculdade SESI-SP

O ensino de Geometria Esférica por meio da construção de um transferidor esférico

Daniele Cristina de Cena Silva
Joana Kelly Souza dos Santos
Ubiratan Barros Arrais

RESUMO

Este artigo tem por objetivo apresentar resultados de um Trabalho de Conclusão de Curso que trouxe a proposta da elaboração de um Projeto Didático (PD) voltado ao ensino de Geometria Esférica. A proposta consiste na construção de um recurso didático pedagógico que viabilize a compreensão de medidas em superfícies curvas a partir da resolução de situações problema. O recurso didático trata-se de um transferidor esférico, instrumento manipulável concebido com o intuito de facilitar a compreensão de conceitos relacionados à medição de ângulos e superfícies curvas, tradicionalmente apresentados de forma abstrata no ensino da Geometria. Para isso, a proposta se fundamenta em Coutinho (2001) sobre o tratamento das geometrias não-euclidianas, em específico a Geometria Esférica, assim como Lorenzato (2009) sobre a utilização de recursos manipuláveis para o ensino de Matemática. No âmbito do PD, o Transferidor Esférico foi utilizado por representar um recurso de baixo custo, passível de construção em diferentes ambientes de ensino, cuja utilização possibilita investigações práticas por meio de observações, do diálogo e do raciocínio espacial. A proposta se configura, assim, como uma estratégia que busca contribuir na superação de dificuldades de aprendizagem em Geometria na Educação Básica, além de subsidiar o diálogo entre a Matemática e outros Componentes Curriculares,

como Geografia ao se trabalhar latitudes e longitudes, estabelecendo também a conexão com a História das Navegações. Espera-se, portanto, que a proposta contribua para a aprendizagem dos estudantes, além de propor uma ferramenta alternativa para o ensino de conteúdos que geram dificuldades e que pouco são discutidos no ensino básico.

PALAVRAS-CHAVE Geometria Esférica; Geometrias Não-Euclidianas; Transferidor Esférico; Ensino de Matemática; Recursos Didáticos.

Instrodução

Este artigo resulta da produção do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da primeira autora, sob orientação do segundo autor e avaliação da terceira autora. Na ocasião, em 2026, foi elaborada uma proposta didática, em formato de Projeto Didático (PD) com a finalidade de viabilizar o ensino das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica, em especial, da Geometria Esférica, termos que serão melhor discutidos em linhas posteriores.

Para falar sobre Geometrias não Euclidianas, faz-se necessário entender a que se refere a Geometria Euclidiana. Fundamentada nos Elementos de Euclides (séc. III a.C.), a Geometria Euclidiana constitui historicamente a base do ensino geométrico nas escolas brasileiras. Seus postulados, como a definição de retas paralelas e a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180º, são tradicionalmente apresentados como verdades absolutas. No entanto, de acordo com Coutinho (2001), essa abordagem ignora um fato crucial: vivemos em um mundo cuja superfície apresenta curvatura, no qual as regras da Geometria Euclidiana apresentam limitações.

Um exemplo possível de aqui ser tomado é a Terra. Ela possui formato elipsoidal, por essa razão, elementos como as rotas aéreas, coordenadas geográficas e até o funcionamento do GPS estão diretamente relacionados à Geometria Esférica, um modelo particular da Geometria Elíptica que foi proposta por Riemann no século XIX. Nessa geometria, as chamadas "retas" correspondem aos círculos máximos da esfera, os triângulos apresentam soma de ângulos internos superiores a 180º e não existem paralelas, uma vez que quaisquer duas geodésicas sempre se cruzam, Coutinho (2001).

Apesar de sua relevância prática, o estudo das Geometrias não-Euclidianas ainda é pouco explorado no ensino básico.

Assim como apontam Thomaz e Franco (2007), essa limitação contribui para a manutenção de uma visão restrita da Matemática, frequentemente percebida pelos estudantes como um conjunto de regras fixas e desconectadas da realidade.

Diante disso, é importante adotar estratégias pedagógicas para aproximar os estudantes dos conceitos aplicados da Matemática ao seu dia a dia, a fim de construir uma aprendizagem mais significativa. A utilização de materiais manipuláveis, de acordo com Lorenzato (2009), é um dos elementos que possibilita que conceitos tradicionalmente abstratos sejam explorados por meio da experimentação, observação e investigação.

Assim, este artigo tem como objetivo apresentar uma proposta didático-pedagógica baseada na construção de um Transferidor Esférico como recurso manipulável para o ensino de conceitos da Geometria Esférica no ensino básico.

Geometria Euclidiana e suas fundamentações

A Geometria Euclidiana é, historicamente, o ponto de partida para quase tudo o que estudamos na escola, principalmente quando falamos de figuras, medidas e espaço. Essa geometria nasce juntamente com Euclides, em meados do século III a.C., quando ele a organiza no livro o qual conhecemos como Os Elementos e apresenta uma maneira de construir a Matemática a partir de ideias que, para ele, eram tão naturais que nem necessitavam de provas, são os denominados axiomas e postulados.

Ao pensarmos na Geometria Euclidiana, imaginamos um espaço plano, onde as retas seguem infinitamente sem fazer qualquer curva, a soma dos ângulos internos dos triângulos sempre é equivalente a 180º e a distância entre dois pontos sempre pode ser facilmente medida. Por isso, esse modelo geométrico atende com precisão as construções, desenhos e problemas que encontramos na vida cotidiana. Ela, a Geometria Euclidiana, é baseada em alguns elementos, como axiomas e postulados que, segundo Coutinho (2001), podem ser compreendidos da seguinte forma:

Axiomas

Um axioma é definido como uma verdade fundamental tão óbvia que não precisa ser provada. Os axiomas de Euclides são:

1. Coisas iguais a uma terceira coisa são iguais entre si.
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais.
5. O todo é maior que qualquer parte.

Postulados
Um postulado é a afirmação assumida como verdadeira para um argumento, mesmo que não seja demonstrado. Os Postulados de Euclides são apresentados da seguinte forma:

6. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro.
7. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
8. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
9. Todos os ângulos retos são iguais.
10. Se uma reta secante a duas outras forma ângulo, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.

Teorema

Teorema é uma afirmação que pode ser provada utilizando axiomas e postulados.

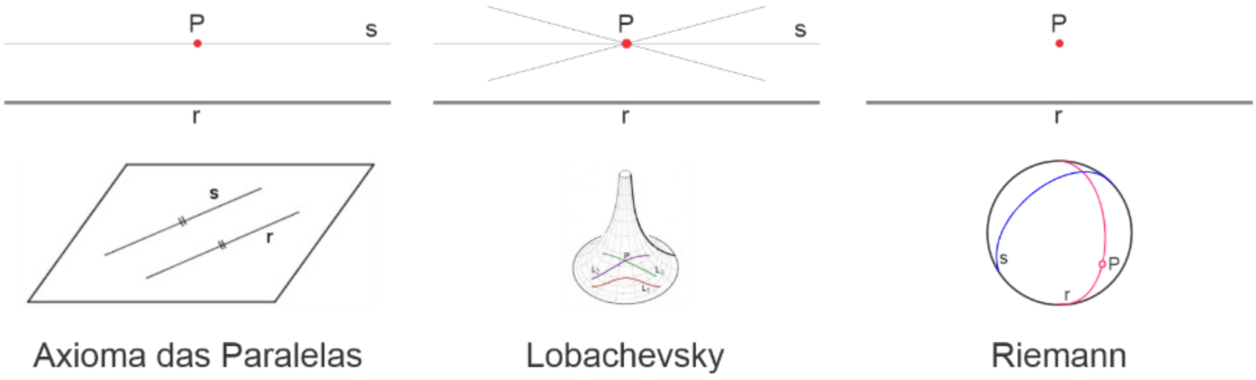
A fundamentação desse artigo inicia-se com a História da Matemática, como é possível de ser identificado, e o debate criado em torno do Quinto Postulado de Euclides, o qual não se caracteriza como um postulado intuitivo e sua formulação sempre gerou desconforto. Coutinho (2001) apresenta o Quinto Postulado na

> “Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado (Coutinho, 2001, p. 34).

A partir do Quinto Postulado, mencionado anteriormente e que comumente é apresentado como: “Dado um ponto fora de uma reta, existe uma, e apenas uma, reta paralela a essa que passa pelo ponto”, por não ser fácil de ser provado, motivou matemáticos a investigarem o que aconteceria caso essa regra fosse desconsiderada. Esse questionamento abriu portas para que as Geometrias não-Euclidianas fossem exploradas. A partir desses questionamentos, surgiram alguns tipos de Geometrias não-Euclidianas, como a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Para a Geometria Hiperbólica, por um ponto P fora de uma reta r, passam infinitas retas paralelas a essa reta r, já na Geometria Elíptica, que é o foco desse trabalho, não existe nenhuma paralela. Observem os exemplos na (figura 1).

Figura 1 - Paralelas



Fonte: Silva (2025)

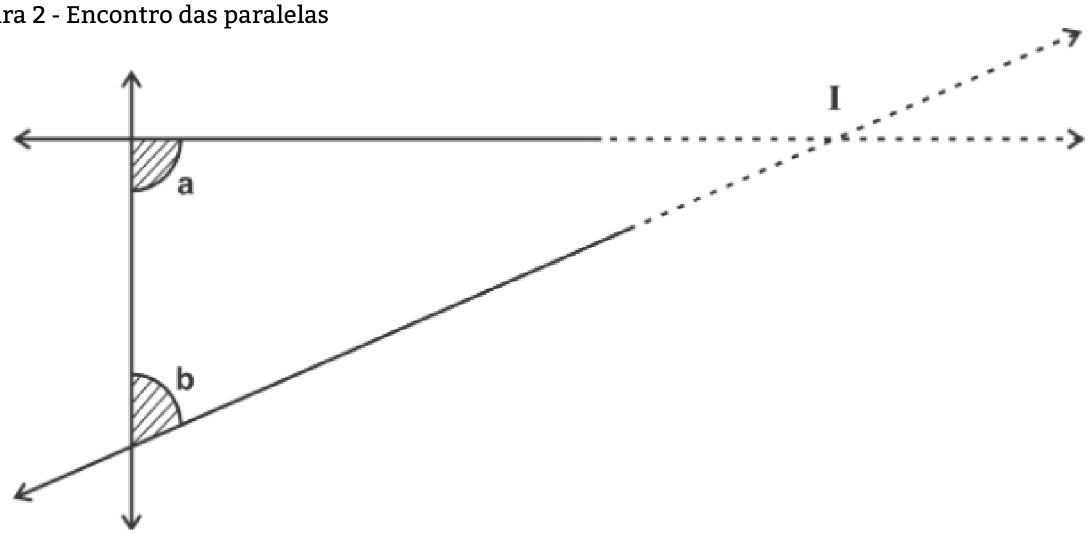
Como já mencionado em linhas anteriores, Coutinho (2001) apresenta que a Geometria Euclidiana começa a mostrar seus limites quando deixamos de olhar apenas para o plano e passamos a observar superfícies curvas, assim como a superfície terrestre. A figura 1 representa essa limitação ao trazer diferentes representações de Geometrias não-Euclidianas.

Partindo dessa descoberta, Coutinho (2001) menciona que surgiram novas maneiras de pensar a geometria e assim, matemáticos como Gauss1, Lobachevsky2, Bolyai3 e Riemann4 mostraram que, ao alterar os comportamentos das paralelas, outras geometrias tornam-se possíveis. Entre essas geometrias está a Geometria Elíptica, modelada por Riemann, da qual a Geometria Esférica é um caso especial. Nela, aquelas "retas" deixam de ser retas no sentido Euclidiano e passam a ser representadas por círculos máximos. Nesse modelo não existem paralelas e os triângulos têm soma angular maior que 180º.

Contrariando o Quinto Postulado, Riemann criou a Geometria Elíptica, que determina que não existe nenhuma paralela à reta dada. Nesta geometria, a reta deixa de ser entendida como infinita no sentido Euclidiano e passa a ser representada por arcos de círculos máximos.

Na Geometria Riemanniana, o axioma que substitui o Postulado das Paralelas de Euclides afirma que quaisquer duas retas em um plano têm, pelo menos, um ponto de encontro (figura 2), deixando claro que não existem retas paralelas nesse modelo geométrico.

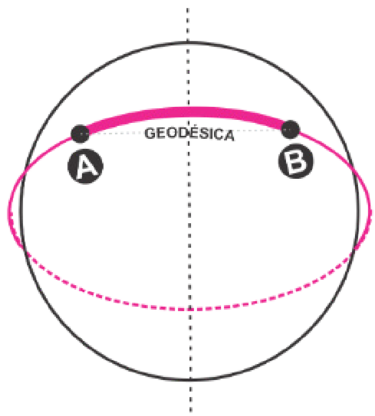
Figura 2 - Encontro das paralelas



Fonte: Coutinho (2001, p. 34)

Uma maneira de entender esse modelo é pensarmos na superfície terrestre, as retas são representadas por geodésicas (figura 3), isto é, a ideia de círculos máximos. Nessa geometria a reta é substituída pelo conceito de círculo máximo, que nada mais é que a intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro, ilustrado na figura 3. Na Geometria Elíptica, dada uma reta (ou geodésica) e um ponto fora dela, não existe nenhuma paralela que passe por esse ponto.

Figura 3 - Geodésica



Fonte: Silva (2025)

Essa é a lógica trabalhada no modelo de Riemann. Além disso, a soma dos ângulos internos do triângulo esférico será maior que 180º. Para ilustrar essas diferenças, o Quadro 1 apresenta um comparativo dessas Geometrias.

Quadro 1 - Características das Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas

Conceito geométrico	Geometria Euclidiana	Geometrias Não-Euclidianas	
Superfície	Plana	Elíptica (Esférica)	Hiperbólica
Paralelas	Existe apenas uma paralela.	Não existem paralelas.	Existem infinitas paralelas.
Soma dos ângulos internos do triângulo	180º	Maior que 180º	Menor que 180º
Formato das retas	Linhas retas comuns	Arcos de círculos máximos	Curvas que se afastam

Fonte: Silva (2025)

Nessa perspectiva, a construção do Transferidor Esférico passa a ser uma ferramenta didática que possibilita aos alunos visualizar e mensurar essas diferenças. A aplicação dos conceitos de ângulos e medidas em superfícies curvas é fundamental para áreas como a Navegação Aérea, a Navegação Marítima e a Cartografia, especialmente no trabalho com as coordenadas geográficas, proporcionando uma atividade prática e motivadora no ensino da Matemática e que pode ser visualizada a partir da proposta aqui mencionada.

A inquietação que gerou o surgimento desta produção veio a partir da identificação de uma dificuldade de compreensão da aplicação da geometria euclidiana dos estudantes da Educação Básica em situações cotidianas. Como apontam Thomaz e Franco (2007), esses estranhamentos não são falhas dos estudantes, na verdade são características próprias do modelo Euclidiano, que simplesmente não foi elaborado para a utilização em superfícies esféricas como a Terra, por exemplo.

O desafio central nesta proposta é mostrar que a geometria transcende as representações planas da Educação Básica, evidenciando que as regras Euclidianas não são suficientes para descrever superfícies curvas como a do Planeta Terra. Um exemplo dessa transição é a soma dos ângulos internos de um triângulo, que atinge exatamente 180º no plano, mas supera esse valor em superfícies esféricas.

Diante dessas variações nas relações geométricas conforme o tipo de superfície, busca-se esclarecer por que a abordagem plana não atende aos fenômenos terrestres, propondo novas referências que fundamentem medidas e relações em um planeta curvo. Uma das ilustrações possíveis pode ser por meio da rota aérea.

Imagine uma viagem entre São Paulo e Atenas e as visualize no mapa (figura 4), onde São Paulo está indicada pelo pin azul e Atenas pelo vermelho. De que maneira você traçaria o caminho mais curto entre ambas?

Figura 4 - Mapa com Pins em São Paulo e Atenas

Fonte: Silva (2025)

É possível que um primeiro traçado seja com uma reta semelhante à apresentada na figura 5.

Figura 5 - Mapa com reta

Fonte: Silva (2025)

Mas não é bem assim, porque na realidade, como a Terra tem formato elipsoidal, o seu trajeto mais curto passa a ser uma curva, a qual chamamos de geodésica. Ou seja, o que no plano parece ser uma linha reta, na esfera é uma curva (figura 6).

Figura 6 - Mapa geodésica

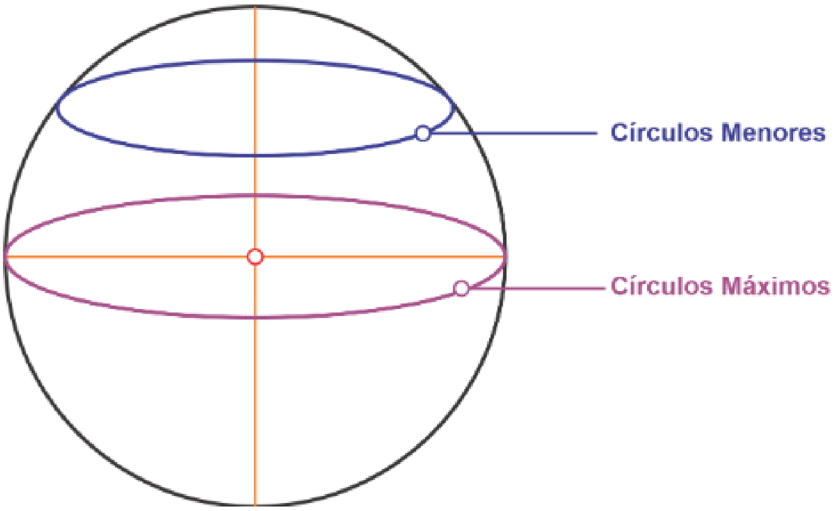
Fonte: Silva (2025)

A partir disso, e de diversos estudos históricos e científicos, foi percebido que o mundo possui forma aproximadamente esférica e, então tornou-se necessário desenvolver uma geometria capaz de trabalhar as características da esfera.

A Geometria Esférica nos ajuda a entender e representar nosso planeta, sendo fundamental para a navegação e a cartografia, pois é necessário entender como as distâncias, ângulos e rotas funcionam numa esfera. Sem esses conceitos, seria difícil trabalhar com latitudes e longitudes. Nessa Geometria notamos, por exemplo, que as regras mudam em relação à Geometria Euclidiana:

A "Reta" passa a ser um Círculo Máximo: Uma reta na esfera não é uma linha infinita, mas sim a intersecção da esfera com um plano que passa exatamente pelo seu centro. É o maior círculo que você pode traçar nela.

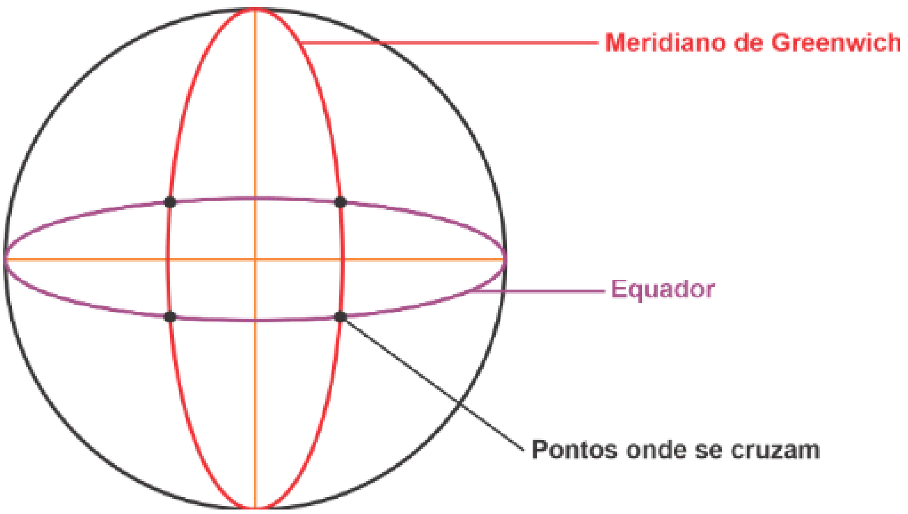
Figura 7 - Círculos máximos e menores



Fonte: Silva (2025)

Paralelas não existem: Na esfera, duas retas, as quais chamamos de Círculos Máximos, que não se cruzam são impossíveis, exceto em pontos diametralmente opostos. Quaisquer duas longitudes ou meridianos se cruzam nos polos. Assim, o Quinto Postulado é formalmente negado.

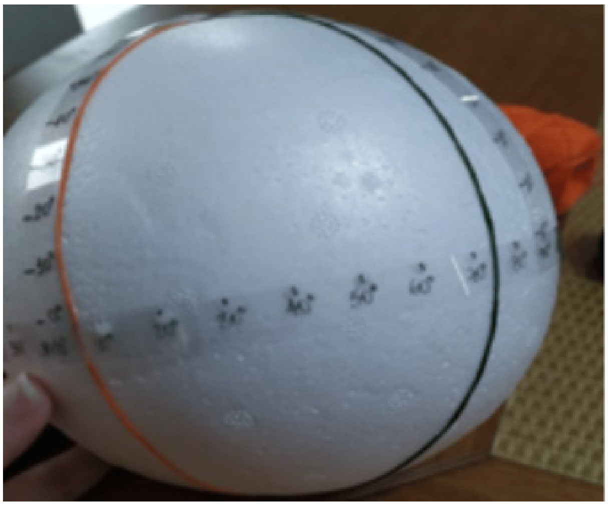
Figura 8 - Cruzamento das "retas paralelas"



Fonte: Silva (2025)

Um dos modos de projetar a visualização desses conceitos para os estudantes da Educação Básica é por meio da construção de um Triângulo Esférico, que pode ser visualizado na figura 9.

Figura 9 – Transferidor Esférico



Fonte: Silva (2025)

O Transferidor Esférico é formado por três arcos de Círculos Máximos. Diferente do que ocorre no plano, onde a soma dos ângulos internos é sempre 180º, na esfera, essa soma passa a ser maior que 180º. Esse excesso aumenta de acordo com o tamanho da área do triângulo.

Ou seja:

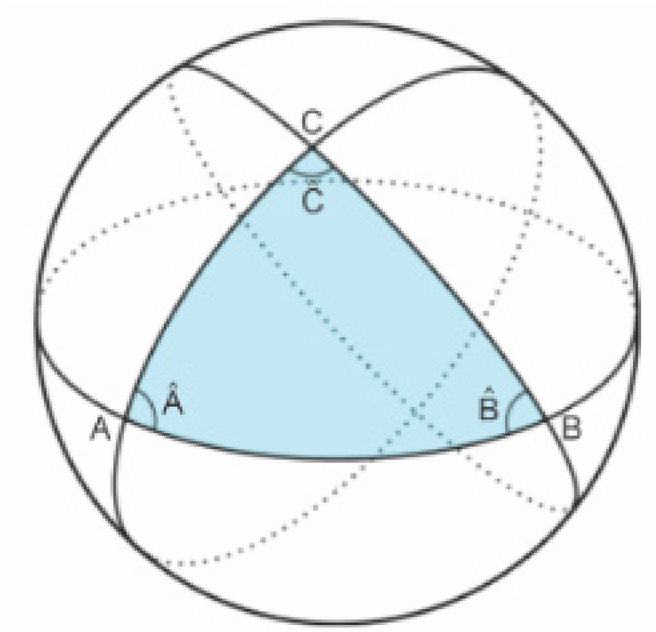
Geometria Plana: A soma é sempre 180º.

Geometria Hiperbólica: A soma é menor que 180º.

Geometria Esférica: A soma é sempre maior que 180º.

Sendo assim, para um triângulo esférico ABC (figura 10), a soma dos seus ângulos internos deve ser maior que 180º e menor que 540º, essa relação pode ser representada da seguinte forma: $180^{\circ} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^{\circ}$. Quanto maior a área do triângulo, maior será seu excesso angular.

Figura 11 - Triângulo Esférico



Fonte: Silva (2025)

O Transferidor Esférico é um importante instrumento para visualizar estas aplicações, pois ele é utilizado para medir e demonstrar ângulos entre arcos de círculos máximos sobre uma superfície esférica. A seguir, apresentamos de que maneira ele pode ser construído.

Para a construção desse recurso é necessária uma esfera de isopor com, no mínimo 25cm de diâmetro, esquadro, tesoura, compasso, caneta de tinta permanente, folhas de acetato (30 micras) em formato A3, fita dupla face, régua, elástico e barbante, como exemplificado na figura 11.

Figura 12 – Materiais necessários para a elaboração do Transferidor Esférico

Fonte: Silva (2025)

Como Fazer

Passo 1: Tomamos a esfera de isopor como modelo de globo terrestre. Aproveitando a junção das duas metades, traçamos o primeiro círculo máximo, correspondente à linha do Equador.

Passo 2: Determinação dos polos através de construção geométrica. Sugere-se marcar três pontos não colineares sobre o Equador. A partir desses pontos, constroem-se dois segmentos e suas respectivas mediatrizes. A intersecção dessas mediatrizes determinará a posição do polo.

Passo 3: Traçar o círculo máximo que passa pelos polos, correspondente ao meridiano principal.

Passo 4: Recortar tiras de acetato com aproximadamente 1,5cm de largura e comprimento suficiente para envolver a esfera, deixando uma pequena sobra para ligar as extremidades. Caso necessário, podem ser unidas duas ou mais tiras.

Passo 5: Determinar o ponto médio da tira e marcá-lo como 0º. A partir desse ponto, marcar os ângulos de dez em dez graus até 180º para a direita e esquerda.

Passo 6: Para determinar o espaçamento correspondente a cada 10º, medir a circunferência real da esfera e dividir esse valor por 36, considerando uma volta completa de 360º (lembre-se de deixar a sobra para ligar as extremidades). Abra o compasso exatamente nessa medida e vá marcando sucessivamente os 36 intervalos na tira de acetato até completar toda a circunferência.

Passo 7: Repetir o processo com mais duas tiras, agora com metade do comprimento da circunferência. O centro dessas tiras será marcado como 90º.

Passo 8: Colar as extremidades das tiras. As fitas menores deverão ser alinhadas sobre o meridiano, fazendo com que o 90º coincida com o polo e as extremidades (0º) com o equador.

O uso do Transferidor Esférico se configura como um recurso didático que pode contribuir para a visualização dos conceitos geométricos. Para Lorenzato (2009), os recursos didáticos ou manipuláveis permitem ao estudante observar, explorar, formular hipóteses, testar ideias e construir conceitos matemáticos. O material funciona como mediador entre o pensamento abstrato e a experiência concreta, servindo como um instrumento que possibilita a ação do estudante sobre o objeto matemático, favorecendo a investigação, a experimentação e a construção de significados.

A proposta do PD está em, com o uso do transferidor esférico, propor experiências que instiguem os estudantes a investigar, criar e aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo do processo em situações reais, auxiliando na busca e expansão de seus conhecimentos sobre as medidas em superfícies curvas.

Inicialmente recomenda-se o trabalho da transição da Geometria Euclidiana para a Geometria Esférica, realizando um resgate do contexto histórico de Euclides e seus postulados, com destaque para o "inconformismo" em relação ao Quinto Postulado, que historicamente motivou o surgimento das Geometrias não-Euclidianas (Coutinho, 2001).

Após a apresentação do Quinto Postulado e sua tentativa de negação por matemáticos da época, como Lobachevsky, Bolyai e Riemann, os estudantes podem iniciar seus estudos com o objetivo de compreender as diferenças entre as Geometrias não-Euclidiana. Essa etapa é fundamental para que compreendam os conceitos fundamentais como os círculos máximos, geodésicas e triângulos esféricos. Posteriormente, recomenda-se uma aproximação interdisciplinar com a Geografia e a Cartografia ao abordar coordenadas geográficas, meridianos e paralelos.

Nas orientações do PD, para os encontros finais, os estudantes deverão construir o Transferidor Esférico seguindo o passo a passo contido nesse trabalho e a partir dessa construção, realizarão atividades práticas voltadas à resolução de problemas reais, como as rotas de navegação e cálculos de distâncias entre cidades, em seguida, será realizada uma avaliação formativa, com demonstrações e uma mesa redonda, para consolidar os aprendizados ao longo do processo formativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo trouxemos discussões efetuadas no desenvolvimento do TCC da primeira autora que se dedicou a elaborar um Projeto Didático abordando o ensino das Geometrias não-Euclidianas no ensino de Matemática da Educação Básica, em especial a Geometria Esférica e a construção de um Transferidor Esférico como recurso didático.

Ao longo desse trabalho, buscou-se apresentar uma proposta capaz de despertar a curiosidade e promover a compreensão da Geometria Esférica de forma visual e significativa. O uso do Transferidor Esférico possibilitará que o estudante seja protagonista de sua própria aprendizagem, percebendo que a Matemática é uma das linguagens que ajuda a interpretar e explicar o mundo.

Acredita-se que quando o aluno entende o que faz, o aprendizado deixa de ser apenas conteúdo e passa a ser conhecimento. A construção e utilização do Transferidor Esférico buscam ressignificar o ensino da Geometria, aproximando teoria e prática no cotidiano do aluno. O detalhamento do Projeto Didático, bem como um aprofundamento teórico podem ser conferidos no TCC disponível na biblioteca da Faculdade Sesi de Educação.

REFERÊNCIAS

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias Não-Euclidianas.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001. ISBN 9788571930513.

DEVITO, Edson; FREITAS, Lúcia; PEREIRA, Ricardo. **Contribuições das geometrias Não-Euclidianas**. São Paulo: Editora Moderna, 2006

DE PAULA, Luiz Tiago; ARRAIS, Ubiratan Barros. Matemática e Geografia: **as contribuições da interdisciplinaridade da Geometria não-euclidiana e da Cartografia no Ensino e aprendizagem.** Revista Faculdade FAMEN, Natal, v. 3, n. 2, p. 1-20, 2023.

LORENZATO, Sergio. (Org.). **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

SANTOS, Wellington Tavares dos. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. 2016

SESI-SP, **Orientações didáticas para professores do Personaliza: Matemática.** São Paulo, 2024

SILVA, Daniele Cristina de Cena. **Entre paralelos e meridianos: a matemática do transferidor esférico.** 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade Sesi-SP de Educação, São Paulo-SP, 2025.

THOMAZ, Ângela; FRANCO, Neide. **Geometria Não-Euclidiana: Geometria Esférica.** Curitiba: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2007/2008.